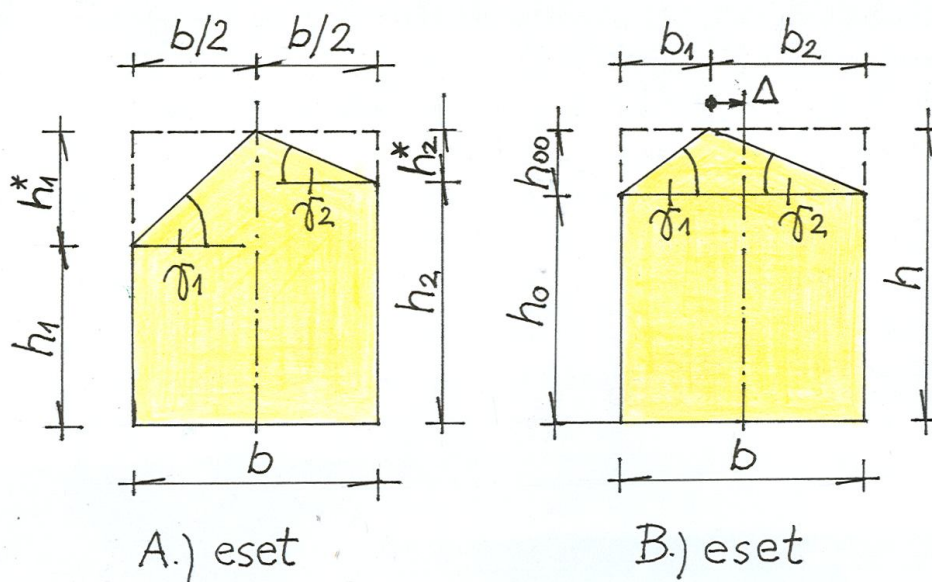


Kiegészítés az ötszög keresztmetszetű élszarufához

Egy korábbi dolgozatunkban

– címe: *Az ötszög keresztmetszetű élszarufa keresztmetszetének kialakításáról* – megemlítettük, hogy $\gamma_1 \neq \gamma_2$ esetén a B.) megoldás általában jobb anyagkihasználást eredményez – ld. 1. ábra! Ezt most igazoljuk.



1. ábra

ÁLLÍTÁS:

A $\gamma_1 \neq \gamma_2$ általános esetben a B.) szerinti élszarufa keresztmetszet - kialakítás alkalmazásakor kisebb a megmunkálási veszteség, mint az A.) szerintinél.

IGAZOLÁS:

A.) eset:

A veszteség - százalék (l a gerenda hossza):

$$v_A = \frac{A_{\text{veszteség}}}{A_{\text{teljes}}} \cdot 100 = \frac{A_{\text{veszteség}} \cdot l}{A_{\text{teljes}} \cdot l} \cdot 100 = \frac{A_{\text{veszteség}}}{A_{\text{teljes}}} \cdot 100 (\%). \quad (1)$$

Itt:

$$A_{\text{veszteség}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot h_1^* + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot h_2^* = \frac{b}{4} \cdot (h_1^* + h_2^*), \quad (2)$$

$$A_{\text{teljes}} = b \cdot h. \quad (3)$$

Most (1), (2), (3) - mal:

$$v_A = \frac{\frac{b}{4} \cdot (h_1^* + h_2^*)}{b \cdot h} \cdot 100 = \frac{100}{4} \cdot \frac{h_1^* + h_2^*}{h}. \quad (4)$$

Az 1. ábra szerint:

$$h_1^* = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \gamma_1, \quad (5)$$

$$h_2^* = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \gamma_2, \quad (6)$$

így (4), (5), (6) - tal:

$$v_A = \frac{100}{8} \cdot \frac{b}{h} \cdot (\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2). \quad (7)$$

B.) eset:

A veszteség - százalék:

$$v_B = \frac{{}_B A_{\text{veszteség}}}{A_{\text{teljes}}} \cdot 100; \quad (8)$$

itt:

$${}_B A_{\text{veszteség}} = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h_{00} + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h_{00} = \frac{h_{00}}{2} \cdot (b_1 + b_2) = \frac{b \cdot h_{00}}{2}. \quad (9)$$

Most (3), (8), (9) - cel:

$$v_B = \frac{\frac{b \cdot h_{00}}{2}}{b \cdot h} \cdot 100 = \frac{100}{2} \cdot \frac{h_{00}}{h}. \quad (10)$$

Az előző dolgozatban kaptuk, hogy

$$h_{00} = \frac{b}{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2}, \quad (11)$$

így (10) és (11) - gyel:

$$v_B = \frac{100}{2} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2}. \quad (12)$$

Most képezzük a v_A / v_B hányadost! (7) és (12) - vel:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{100}{8} \cdot \frac{b}{h} \cdot (\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2)}{\frac{100}{2} \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2}} = \frac{1}{4} \cdot (\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2) \cdot (\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_1} + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} + \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1} + 1 \right),$$

tehát

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 + \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} + \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1} \right). \quad (13)$$

A (13) képletből kiolvasható, hogy $\gamma_1 = \gamma_2$ *esetén* $v_A / v_B = 1$.

Most tegyük fel, hogy $v_A / v_B > 1$! Mikor következik ez be?

(13) - mal:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 + \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} + \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1} \right) > 1; \quad (*) \text{ innen:}$$

$$2 + \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} + \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1} > 4;$$

folytatva:

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} + \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1} > 2;$$

közös nevezőre hozva:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \gamma_1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma_2} > 2;$$

rendezve:

$$\operatorname{tg}^2 \gamma_1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_2 > 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma_2;$$

ebből:

$$\operatorname{tg}^2 \gamma_1 - 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 + \operatorname{tg}^2 \gamma_2 > 0,$$

azaz:

$$(\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2)^2 > 0. \quad (**)$$

Az (*) és (**) képletekből kiolvasható, hogy $v_A / v_B > 1$, ha $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Más szavakkal:

a $\gamma_1 \neq \gamma_2$ *általános esetben* $v_B < v_A$,

amit igazolni kellett.

Megjegyzés:

A (13) képlet szerinti függvény egyszerűsített ábrázolása az alábbiak szerint történhet.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$y = \frac{v_A}{v_B}, \quad (14)$$

$$x = \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2}, \quad (15)$$

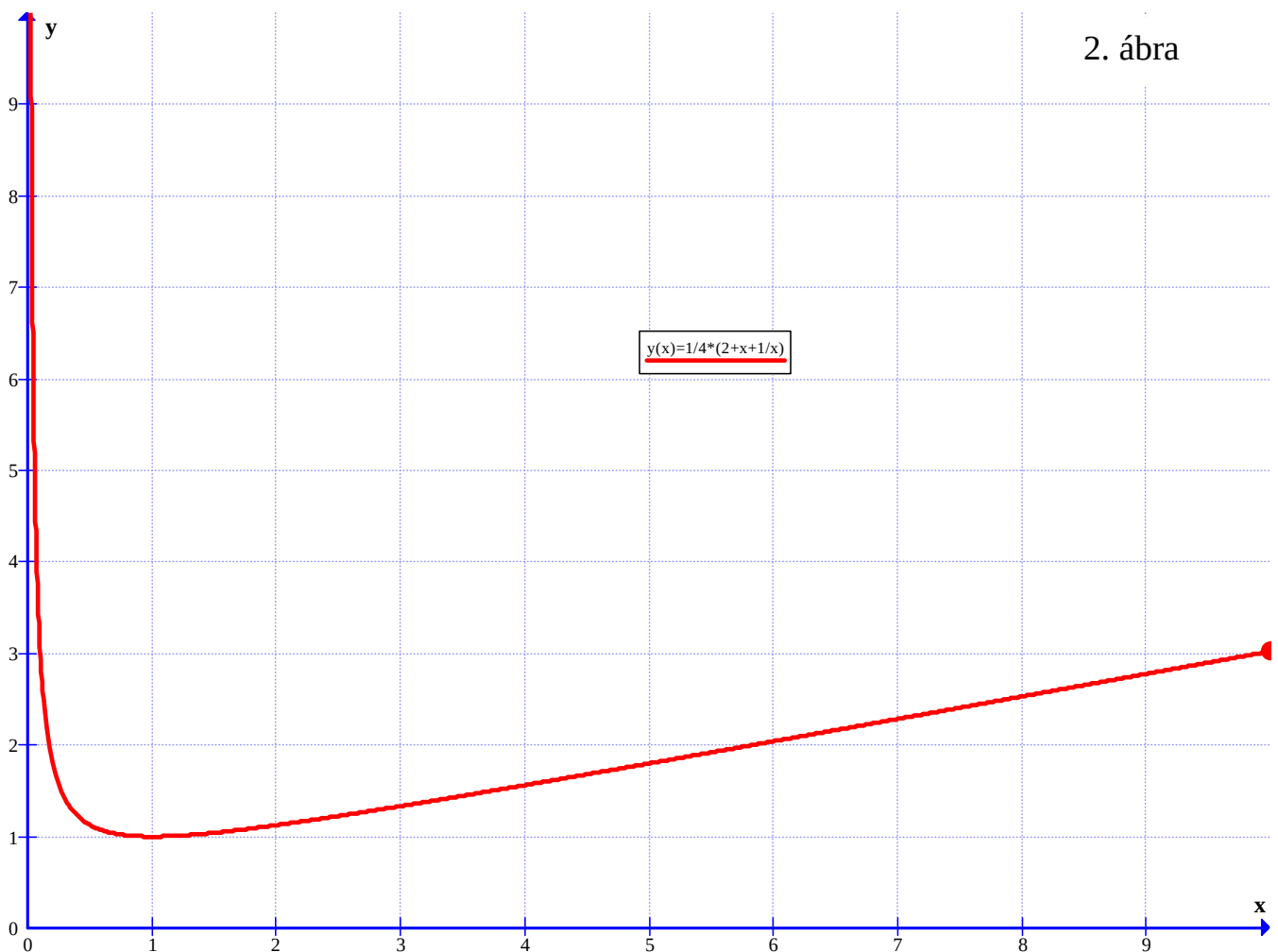
így (13), (14) és (15) - tel:

$$y(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(2 + x + \frac{1}{x} \right). \quad (16)$$

Fentiek szerint fennáll, hogy

$$x > 0, \quad y \geq 1. \quad (17)$$

A (16) függvény (17) tulajdonságait a 2. ábra szemlélteti.



Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnökstanár

Szödliget, 2009. június 5.